DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

CONCOURS D'ADMISSION A L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

MATHEMATIQUES

2ème épreuve commune aux options M et P

Durée : 4 heures

L'épreuve se compose d'un problème en cinq parties. La partie IV est indépendante des parties II et III, et bien qu'il soit préférable de traiter le problème dans l'ordre proposé par l'énoncé, il est tout à fait possible de résoudre les parties II, III, IV avant d'avoir résolu entièrement le I.

La présentation et l'orthographe auront leur part dans la notation.

Enfin, l'attention des candidats est attirée sur le fait que l'ensemble du problème peut être résolu avec très peu de calculs.

Dans tout le problème $\mathbb{R}_2[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de l'ensemble des polynômes à une indéterminée sur $\mathbb{R}$, engendré par le système (1, X, X^2), D est le polynôme (X-a) (X-b) (X-c) où les réels a,b,c sont, ou non, distincts. Si K est un polynôme et α un scalaire, K(α) désigne la valeur numérique en α de la fonction polynôme associée à K.

On associe, à tout élément A de $\mathbb{R}_2[X]$ l'application r_A de $\mathbb{R}_2[X]$ vers lui-même qui, au polynôme P élément de $\mathbb{R}_2[X]$ associe le polynôme $r_A(P)$ défini par les deux relations :

$$(1) \quad P.A = Q.D + r_A(P)$$
$$(2) \quad r_A(P) \in \mathbb{R}_2[X]$$

$r_A(P)$ est donc le reste de la division euclidienne de P.A par D, et le polynôme Q, qui dépend également de A et de P, en est, incidemment, le quotient.

I

I-1) Montrer que r_A est un endomorphisme d'espace vectoriel

I-2) Montrer que si A n'est pas un polynôme, soit nul, soit de degré 0, et si P est un polynôme propre de r_A, alors P n'est pas premier avec D.

I-3) Montrer que le réel A(a) est une valeur propre de r_A, puis identifier l'ensemble des valeurs propres de r_A.

I-4) Dans les cas suivants, déterminer l'ensemble des valeurs propres de r_A, ses sous-espaces propres, dont on donnera une base, puis préciser si r_A est diagonalisable.

1) $D = X(X-1)(X-2)$ et $A = X^2 - X + 3$
2) $D = X(X-1)^2$ et $A = X^2 - X + 3$
3) $D = X(X-1)^2$ et $A = X^2 - 2X$.

II

On suppose dans cette partie et la suivante que les réels a,b,c sont distincts. Soient S_1 le système $\left(\frac{D}{X-a}, \frac{D}{X-b}, \frac{D}{X-c}\right)$ noté aussi (I_1, J_1, K_1)

et S le système $\left(\frac{I_1}{I_1(a)}, \frac{J_1}{J_1(b)}, \frac{K_1}{K_1(c)}\right)$, noté aussi (I,J,K)

II-1) Montrer que S_1, puis S, sont des bases de $\mathbb{R}_2[X]$

II-2) Calculer, à l'aide de U(a), U(b), U(c) les coordonnées sur S d'un élément U de $\mathbb{R}_2[X]$

II-3) Calculer, en particulier celles de 1, X, X^2, puis écrire les matrices de passage de la base canonique (1, X, X^2) de $\mathbb{R}_2[X]$ vers S d'une part, de passage de S vers la base (1, X, X^2) d'autre part.

II-4) Donner la matrice de r_A relativement à la base S, à l'aide des coordonnées de A sur S.

III

III-1) Montrer que, $\forall$ (A,B) élément de $\mathbb{R}_2[X]^2$, il existe (C,H), élément de $\mathbb{R}_2[X]^2$ tel que :

(3) $r_A + r_B = r_C$

et

(4) $r_A \circ r_B = r_H$

identifier ces polynômes, et donner leurs coordonnées sur la base S à l'aide de celles de A et B.

III-2) Déduire de III-1) que l'ensemble des applications $\left\{ r_A,\ A \in \mathbb{R}_2[X] \right\}$ a une structure d'algèbre commutative

III-3) Vérifier que $H = r_A(B) = r_B(A)$.

III-4) Déterminer les polynômes A tels que $r_A \circ r_A = e$, où e est l'identité sur $\mathbb{R}_2[X]$ par leurs coordonnées sur S et sur la base $(1, X, X^2)$.

IV

On suppose maintenant que $a = c$, $a \neq b$, (donc $D = (X-a)^2 (X-b)$)

IV-1) Montrer que tout élément U de $\mathbb{R}_2[X]$ est entièrement déterminé par la donnée de $(U(a), U'(a), U(b))$

IV-2) Trouver la base de $\mathbb{R}_2[X]$, soit $\Sigma = (L,M,N)$ telle que pour tout U dans $\mathbb{R}_2[X]$ on ait :

(5) $U = U(b)L + U(a)M + U'(a)N$

IV-3) Déterminer la matrice de r_A sur la base Σ. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que r_A soit diagonalisable.

IV-4) Montrer qu'il existe, pour tout élément (A,B) de $\mathbb{R}_2[X]^2$, H dans $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $r_A \circ r_B = r_H$.

En déduire la structure de l'ensemble $\left\{ r_A,\ A \in \mathbb{R}_2[X] \right\}$ muni de l'addition et de la composition des applications. Montrer que $H = r_A(B) = r_B(A)$.

V

Dans cette partie, on remplira un tableau du modèle ci-dessous, en notant dans chaque case, qui éventuellement pourra subir une partition,

- le nombre et la valeur des valeurs propres de r_A
- une base du sous-espace propre associé à chaque valeur propre
- l'indication du fait " r_A est (ou n'est pas)diagonalisable ".

Dans la case marquée (*), on montrera que r_A admet au moins deux valeurs propres distinctes.

On repèrera dans le tableau l'emplacement convenant aux exemples numériques traités dans la question I-4).

NB - Le cas A = O est exclu de cette étude.

(a,b,c) \ A	degré (A) = 0	degré (A) = 1	degré (A) = 2
a = b = c			
a = c a ≠ b			
a , b, c distincts			

Les résultats ainsi affichés seront justifiés, soit par une référence à l'une des questions résolues dans les parties précédentes, soit par une étude directe.